Дәріс 14

Шеңбер үшін ішкі және сыртқы Дирихле есебінің шешуі. Грин функциясы.Шар үшін Дирихле есебі

1.Шеңбер үшін ішкі және сыртқы Дирихле есебінің шешуі.

Лаплас теңдеуі поляр координаттарында былай жазылады:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0 \qquad (1)$$

Лаплас теңдеуі үшін Дирихле есебін аймақ дөңгелек болған жағдайда шешеміз. Дөңгелектің радиусы R, центрі координата басында болсын. Шеңберде гармониялық, дөңгелектің шекарасы $r=R$ шеңберде алдын – ала берілген $\varphi(\theta)$ үздіксіз мәндерін қабылдайтын, яғни

$$u_{r=R}=\varphi(\theta) \qquad (2)$$

$u(r,R)$ функциясы табылсын.

Ізделінді шешім бір мәнді болуы үшін $\varphi(\theta)$ функция 2π периодты фунция болуы керек. Бұл есептің дербес шешімдерін

$$u(r,\theta)=W(r)\theta(\theta)$$

көріністе іздеп, мұндағы белгісіз $W(r)$ және $\theta(\theta)$ функциялар үшін

$$\theta''(\theta)+\lambda\theta(\theta)=0 \qquad (3)$$

$$r^2W''(r)+rW'(r)-\lambda W(r)=0$$

жай дифференциалдық теңдеулерді келтіріп шығарамыз.

(3) теңдеудің шешімі

$$\theta_n(\theta)=A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta, \qquad n=0,1,2,...$$

көріністе болады. $W(r)$ функцияны анықтау үшін

$$r^2W''(r)+rW'(r)-n^2W(r)=0 \qquad (4)$$

теңдеуге ие боламыз. Ал бұл, $n\neq 0$ де Эйлер теңдеуі. Тәуелсіз айнымалыны $r=e^{\xi}$ ге ауыстыру нәтижесінде

$$W''_{\xi\xi}-n^2W=0$$

теңдеуге келеміз. Бұл теңдеу екі $W=e^{n\xi}$ және $W=e^{-n\xi}$ немесе $W=r^n$ және $W=r^{-n}$ шешімге ие. Ал $n=0$ болғанда бұл теңдеу $\ln r$ және 1 сызықты тиісті болмаған шешімдерге ие.

Бірақ, r^{-n} және $\ln r$ ($n=0$ де) шешімдер $r\to 0$ да шенелген болмағаны үшін, оларды есепке алмаймыз.

Сонымен, бір ғана

$$W_n(r)=r^n \qquad n=1,2,3,...$$

шешім қалады. Бұлар негізінде

$$u_n(r,\theta)=(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)r^n$$

Лаплас теңдеуі сызықты және бір текті болғаны үшін, дербес шешімдерінің жиыны

$$u(r,\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)r^n \qquad (5)$$

да Лаплас теңдеуінің шешімі болады. A_0, A_n, B_n коэффиенттерін нәтижеде (3) шекаралық шарт орындалатындай етіп таңдаймыз, яғни

$$\varphi(\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_nR^n\cos n\theta+B_nR^n\sin n\theta)$$

Ал бұл қатар $\varphi(\theta)$ функцияның Фурье қатарына жайылған, оның коэффициенттері төмендегі формулалармен анықталады:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\tau)d\tau, \qquad A_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}\varphi(\tau)\cos n\tau d\tau,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}\varphi(\tau)\sin n\tau d\tau. \tag{6}$$

Коэффициенттері (6) формулалар мен наықталған (5) қатарды $r < R$ де қалауынша r және θ бойынша реттеп дифференциалдау мүмкін, себебі әр ретте кез – келген $r_0 < R$ де $0 \le r \le r_0$ дер үшін тегіс жақындайтын қатарлар пайда болады. Бұдан (5) формула мен анықталған $u(r,\theta)$ функция (1) теңдеудің шешімі екендігі келіп шығады.

Кеңістікте Ω - тегіс бетімен шенелген V - облысы берілсін.

$$\Delta U = \rho(M),\ M(x,y,z)\in V \tag{12.1}$$

теңдеудің

$$U\big|_{\Omega} = f(M),\ M(x,y,z)\in \Omega \tag{12.2}$$

шартын қанағаттандыратын $C^2(V)\cap C(\overline{V})$ класында жататын шешімін табу керек. (8.1)-(8.2) есебін ішкі *Дирихле есебі* деп атайды.

Дирихле есебі үшін Грин функциясы.

(12.1) – Пуассон теңдеуінің шешімін табуға Гриннің негізгі формуласын қолданып,

$$U(x_0,y_0,z_0) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_V \frac{\rho}{r}dV + \frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \overline{n}} - U\frac{\partial}{\partial \overline{n}}\left(\frac{1}{r}\right)\right]d\Omega \tag{12.1.1}$$

теңдігін аламыз. Белгілі $g(M,M_0)$ функциясы төмендегі, яғни

1) M нүктесінің координаталарына байланысты $\overline{V}$ облысында бірінші ретті үзіліссіз дербес туындылары бар, ал V облысында гармониялық функция;

2) Ω - бетінде -$\frac{1}{r}$ шектік мәнді қабылдайтын функция;

шарттарын қанағаттандыратын болсын.

$U(M)$ және $g(M,M_0)$ функцияларына Гриннің екінші формуласын қолданып,

$$\frac{1}{4\pi}\iiint_V (U\Delta g - g\Delta U)\,dV \equiv -\frac{1}{4\pi}\iiint_V g\rho\, dV = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega}\left[U\frac{\partial g}{\partial \overline{n}} - g\frac{\partial U}{\partial \overline{n}}\right]d\Omega$$

немесе $g(M,M_0)\big|_{\Omega} = -\frac{1}{r}$ екендігін ескеріп,

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint_V g\rho dV = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Omega}\left[U\frac{\partial g}{\partial \overline{n}} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \overline{n}}\right]d\Omega \tag{12.1.2}$$

теңдігін аламыз. (12.1.1) теңдігінен (12.1.2) теңдігін алу арқылы

$$U(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_V \left(\frac{1}{r}+g\right)\rho\, dV - \frac{1}{4\pi}\iint_\Omega \left[U\frac{\partial}{\partial \bar{n}}\left(\frac{1}{r}+g\right)\right] d\Omega \qquad (12.1.3)$$

теңдігіне келеміз. Осы теңдіктегі $\dfrac{1}{4\pi r}+\dfrac{g}{4\pi}$ функциясын Пуассон теңдеуіне қойылатын ішкі Дирихле есебінің *Грин функциясы* деп атайды және оны $G(M, M_0)$ деп белгілейді. Сонымен,

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r} + \frac{g}{4\pi}$$

12.1.1-анықтама.

1) $G(M, M_0)$ - M нүктесіне байланысты, шексіздікке айналатын M_0 нүктесінен басқа V облысының ішінде гармониялық функция;
2) V облысының Ω шекарасында

$$G(M, M_0)\big|_\Omega = 0;$$

3) $G(M, M_0)$ функциясы V облысында

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r} + \frac{g(M, M_0)}{4\pi}, \qquad (12.1.4)$$

мұндағы $r = |M, M_0|$, $g(M, M_0)$ – V облысының ішінде гармониялық функция, түрінде өрнектеледі;

Жоғарыдағы үш шартты қанағаттандыратын $G(M, M_0)$ функциясын Пуассон теңдеуіне қойылатын *ішкі Дирихле есебінің Грин функциясы* деп атайды.

Грин функциясын құру оның регулярлық бөлігі болып есептелетін $g(M, M_0)$ функциясын табуға әкеледі. Ал $g(M, M_0)$ функциясы Лаплас теңдеуіне қойылатын ішкі Дирихле есебінің, яғни

$$\Delta g(M, M_0) = 0,\ M_0 \in V \qquad (12.1.5)$$

$$g(M, M_0)\big|_\Omega = -\frac{1}{r} \qquad (12.1.6)$$

есебінің шешімі ретінде іздестіріледі.

Егер Лаплас теңдеуіне қойылатын ішкі Дирихле, яғни (12.1.5.)-(12.1.6.) есебінің шешімі бар болса, онда (12.1)-(12.2) ішкі Дирихле есебінің шешімі Грин функциясының көмегімен ((12.1.1), (12.1.3), (12.1.4) теңдіктерін ескеріп,

$$U(M_0) = -\iiint_V \rho(M) G(M, M_0) dV - \iint_\Omega f(M)\frac{\partial}{\partial \bar{n}} G(M, M_0) d\Omega \qquad (12.1.7)$$

формуласы арқылы табылады.

(12.1.7) – формуласын қорытып шығару кезінде біз $V \cup \Omega$ облысында бірінші туындысы үзіліссіз шекаралық мәнге ие болатын ішкі Дирихле есебінің $U(M)$ шешімі бар болсын деп ұйғарғанбыз. Сонымен, шешімнің бар болуы туралы дәлелдемені келтірмей-ақ, (12.1.7)-формуласы ішкі Дирихле есебінің өте тегіс болатын шешімінің *интегралдық сипаттамасын* береді.

А.М. Ляпунов жүргізген (12.1.7) формуласының толық зерттеу нәтижесі (12.1.7) теңдеудің оң жағында тұрған $\rho(M)$функция үзіліссіз дифференциалданатын болған кезде, (12.1.7.) формуласы - *Ляпунов беттері* деп аталатын беттер мен шекаралық шартқа кіретін кез келген үзіліссіз $f(M)$ функциясы үшін ішкі Дирихле есебінің шешімін сипаттайтындығын көрсетті.

Максимум принціпін қолданып, $G(M, M_0)$ - Грин функциясының

$$0 < G(M, M_0) < \frac{1}{4\pi r}, \quad M \in V \tag{12.1.8}$$

теңсіздігін қанағаттандыратынын көрсету қиын емес. Сонымен қатар, Грин функциясы

$$G(M, M_0) = G(M_0, M)$$

теңдігін қанағаттандырады, яғни *симметриялы функция.*

3.Шар үшін сыртқы Дирихле есебінің шешімі.

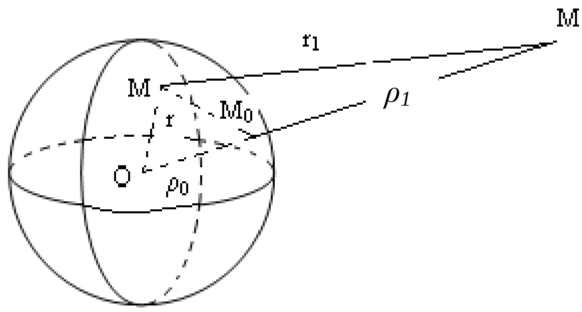
Енді шар үшін Дирихле есебінің шешімін табуға кірісейік. Бұл жағдайда Грин функциясын айқын түрде құруға болады. R - центрі нөл нүктесінде орналасқан шардың радиусы болсын. Шардың ішінде жатататын кез – келген $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесін алып, осы нүктеден шардың центріне дейінгі ара-қашықтықты ρ_0 деп белгілейік.

Ω- сферасына байланысты M_0 - нүктесіне инверсия түрлендіруін қолданайық. Түрлендірілген $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нүктесі шардың сыртында, OM_0 түзуінің бойында, шардың центрінен ρ_1 қашықтықта жататын болады және

$$\rho_0 \cdot \rho_1 = R^2 \tag{12.2.1}$$

теңдігі орындалады.

r және r_1 деп M нүктесінен сәйкесінше M_0, M_1 нүктелеріне дейінгі ара-қашықтықтарды белгілейік. M - нүктесі шардың бетінде жатқан кезде r мен r_1-дің байланыстарын табайық. OM_0M мен OM_1M ұшбұрыштарының O төбесіндегі бұрыштары ортақ және осы бұрышты құрайтын қабырғалары (12.2.1) - формуласы бойынша пропорционал болатындықтан, олар ұқсас үшбұрыштар болады (35 – сурет).



35– сурет

Үшбұрыштардың ұқсастығынан

$$\frac{r}{r_1} = \frac{\rho_0}{R}$$

немесе

$$\frac{1}{r} - \frac{R}{\rho_0} \cdot \frac{1}{r_1} = 0, \ \forall M \in \Omega \tag{12.2.2}$$

теңдігі орындалады.

Енді шар үшін Грин функциясы

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi}\frac{R}{\rho_0} \cdot \frac{1}{r_1} \qquad (12.2.3)$$

формуласы арқылы табылатындығын көрсетейік. Шынында да $G(M, M_0)$ шексіздікке айналатын M_0 нүктесінен басқа шардың ішінде жататын кез-келген M нүктесінде гармониялық функция және шардың Ω бетінде жататын кез-келген нүктелерде оның мәні нөлге айналады, ол (12.2.2) теңдігінен шығады. Сонымен, (12.2.3) – формуласы арқылы құрылған функция Грин функциясының шарттарының барлығын қанағаттандырады. Демек, $G(M, M_0)$ шар үшін Дирихле есебінің *Грин функциясын* анықтайды. Табылған Грин функциясын (12.1.7) – формуласына апарып қойып,

$$U(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\iiint_V \left(\frac{1}{r} - \frac{R}{\rho_0 r_1}\right)\rho\, dV - \frac{1}{4\pi}\iint_\Omega f(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r} - \frac{R}{\rho_0 r_1}\right) d\Omega \qquad (12.2.4)$$

теңдігін аламыз.